

Renormalization-group predictions of universal critical-point amplitude ratios

M. Strösser, S.A. Larin, M. Mönnigmann, and V. Dohm

Institut für Theoretische Physik, Technische Hochschule Aachen
D-52056 Aachen, Germany

Abstract

New renormalization-group predictions are presented for various universal critical-point amplitude ratios in three dimensions as derived from a recent three-loop calculation and Borel resummations for the $O(n)$ symmetric φ^4 field theory below T_c . For the superfluid transition of ${}^4\text{He}$ ($n = 2$), the new results are $A^+/A^- = 1.056 \pm 0.006$ and $R_\xi^T = 0.805 \pm 0.022$. They are significantly more accurate than previous theoretical estimates.

One of the fundamental achievements of the renormalization-group (RG) theory of critical phenomena is the identification of universality classes in terms of the dimensionality d of the system and the number n of components of the order parameter [1]. Specifically, RG theory predicts that, within a given universality class, the critical exponents, certain amplitude ratios and scaling functions are universal quantities that do not depend, e.g., on the strength of the interaction or on thermodynamic variables (such as the pressure). The superfluid transition of ${}^4\text{He}$ belongs to the $d = 3, n = 2$ universality class and provides a unique opportunity for an experimental test of the universality prediction by means of measurements of the critical behavior at various pressures P along the λ -line $T_\lambda(P)$ (and along the λ -line of ${}^3\text{He} - {}^4\text{He}$ mixtures). Early tests have been performed by Ahlers and collaborators and consistency with the universality prediction was found within the experimental resolution [2]. Corresponding tests are planned to be performed, at a significantly higher level of accuracy, in the Superfluid Universality Experiment (SUE) [3] under microgravity conditions or at reduced gravity in the low-gravity simulator [4]. As demonstrated recently [5], this would allow one to perform measurements up to $|t| \simeq 10^{-9}$ in the reduced temperature $t = (T - T_\lambda(P))/T_\lambda(P)$.

Before going to space, however, improved universality tests could presumably be achieved, even in the presence of gravity, by new ground-based measurements provided that non-universal and universal effects are properly separated in a nonlinear RG analysis of the data [6]. To extract the leading critical exponents of the superfluid density ρ_s and the

specific heat C^\pm from the experimental data and to demonstrate their universality at a highly quantitative level requires detailed knowledge on certain universal ratios of leading and subleading amplitudes.

The status of the RG predictions on these amplitude ratios has been reviewed recently [7] where it was proposed to perform new higher-order calculations that could significantly reduce the large uncertainties of previous predictions on these ratios [1]. Here we report on recent progress towards this goal. Part of the results presented here are contained in two forthcoming publications [8, 9].

Our RG calculations are based on the $O(n)$ symmetric ϕ^4 model with the Landau-Ginzburg-Wilson functional

$$\mathcal{H} = \int d^d x \left(\frac{1}{2} r_0 \phi^2 + \frac{1}{2} \sum_i (\nabla \phi_i)^2 + u_0 (\phi^2)^2 - \vec{h} \cdot \vec{\phi} \right) \quad (1)$$

for the n -component field $\vec{\phi}(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x))$ in the presence of the homogeneous external field $\vec{h} = (h, 0, \dots, 0)$. The calculations have been carried out [8, 9] in the minimal subtraction scheme at fixed dimension $d = 3$ [10, 11], without using the $\varepsilon = 4 - d$ expansion.

The thermodynamic quantities of main interest are the order parameter $M = \lim_{h \rightarrow 0} \langle \phi_1 \rangle$, the specific heat C^\pm above and below T_λ , and the superfluid density ρ_s . Their asymptotic power-law behavior is

$$M = A_M |t|^\beta, \quad (2)$$

$$C^\pm = \frac{A^\pm}{\alpha} |t|^{-\alpha} + B, \quad (3)$$

$$\rho_s = \left[\frac{m_4}{\hbar} \right]^2 k_B T_\lambda \frac{1}{\xi_0^T} |t|^{\nu(d-2)}, \quad (4)$$

where A_M, A^\pm and ξ_0^T are non-universal (pressure-dependent) amplitudes. Certain combinations of these amplitudes are predicted to be universal [1]. They can be expressed in terms of the fixed-point values of various amplitude functions [10, 11] that are evaluated at the fixed point u^* of the four-point coupling u_0 of \mathcal{H} , Eq. (1). For the order parameter, the specific heat, and for the superfluid density these fixed-point values of the amplitude functions are denoted by f_φ^* , F_\pm^* and by $G^* = 4\pi f_\varphi^* f_T^*$, respectively. They appear on the r.h.s. of Eqs. (5) - (10) given below. The various universal amplitude ratios as defined in Ref. [1] have the following structure in three dimensions [11]

$$\frac{A^+}{A^-} = \left(\frac{b_+}{b_-} \right)^\alpha \left[1 - \alpha \frac{F_-^* - F_+^*}{4\nu B^* + \alpha F_-^*} \right], \quad (5)$$

$$R_{\xi}^+ = (A^+)^{1/3} \xi_0 = b_+^{2/3} \left(\frac{4\nu B^* + \alpha F_+^*}{16\pi} \right)^{1/3}, \quad (6)$$

$$R_{\xi}^T = (A^-)^{1/3} \xi_0^T = b_-^{2/3} \left(\frac{4\nu B^* + \alpha F_-^*}{16\pi} \right)^{1/3} [f_{\phi}^* f_T^*]^{-1}, \quad (7)$$

$$\xi_0 / \xi_0^T = \left(\frac{b_+}{b_-} \right)^{\nu} f_{\phi}^* f_T^*, \quad (8)$$

$$R_C = \frac{A_{\chi} A^+}{A_M^2} = [b_+^{1-\beta} b_-^{\beta}]^2 \frac{4\nu B^* + \alpha F_+^*}{16\pi} [f_{\phi}^* f^{(2)*}]^{-1}, \quad (9)$$

$$b_+ = 2\nu P_+^*, \quad b_- = 3/2 - 2\nu P_+^*. \quad (10)$$

We have evaluated the r.h.s. of Eqs. (5) - (10) for $n = 1, 2, 3$ in $d = 3$ dimensions. The Borel resummed amplitude functions of the correlation length (P_+^*) and the susceptibility ($f^{(2)*}$) above T_c have been taken from Ref. [12]. The resummed 5-loop series for the additive renormalization constant (B^*), for the specific heat above T_c (F_+^*) as well as for the resummed three-loop series for the specific heat below T_c (F_-^*) have been taken from Ref. [8], the resummed three-loop series for f_{ϕ}^* from Ref. [9] and the two-loop approximation for f_T^* from Ref. [13]. The results are listed in the tables below, together with previous theoretical estimates and with experimental results.

n	field theory		series	experiments
	this work	earlier work		
1	0.540±0.011±0.012	0.524 ±0.010 ^a 0.541 ±0.014 ^b 0.547 ±0.021 ^m 0.536 ±0.019 ^m 0.530 ±0.031 ⁿ 0.537 ±0.019 ⁿ	0.523±0.009 ^c	0.56-0.63 ^d , 0.53 ^e
2	1.056±0.004±0.002	1.0294±0.0134 ^a 1.05 ^f	1.08 ^g	1.054 ±0.001 ^h 1.058 ±0.004 ⁱ 1.067 ^{j1} ±0.012 ^{j2} 1.088 ±0.007 ^k
3	1.51 ±0.04 ±0.05	1.521 ±0.022 ^a 1.58 ^f	1.52 ^g	1.40 ^l

^aBervillier [15]

^dBeysens *et al.* [22]

^gHohenberg *et al.* [19]

^{j1}Singsaas and Ahlers [17]

^lKornblit and Ahlers [27]

^bBagnuls *et al.* [14]

^eKumar *et al.* [23]

^hLipa *et al.* [5]

^{j2}Ahlers [25]

^mGuida and Zinn-Justin [28]

^cLiu and Fisher [21]

^fSchloms and Dohm [11]

ⁱLipa and Chui [24]

^kTakada and Watanabe [26]

ⁿGuida and Zinn-Justin [29]

Table 1: Universal amplitude ratio A^+/A^- , Eq. (5), for $n = 1, 2, 3$ in three dimensions.

n	estimates	R_ξ^+	R_ξ^T	ξ_0/ξ_0^T	R_C
1	this work	0.2736 ± 0.0014			0.0573 ± 0.0007
	previous $d = 3$ theory	0.2700 ± 0.0007^a			0.0594 ± 0.0011^a
	ϵ expansion up to $O(\epsilon^2)$	0.27^b			0.066^c
	series	0.2659 ± 0.0007^d			0.0581 ± 0.0010^d
experiment	$0.25 - 0.32$			$0.04 - 0.09$	
2	this work	0.3665 ± 0.0019	0.805 ± 0.022	0.447 ± 0.013	0.1235 ± 0.0017
	previous $d = 3$ theory	0.3606 ± 0.0020^a	0.78^e	0.50^e	
	ϵ expansion up to $O(\epsilon^2)$	0.36^b	0.96^b	0.33^b	
	$1/n$ expansion			0.140^f	
experiment		0.85 ± 0.02^g			
3	this work	0.4406 ± 0.0027	0.773 ± 0.029	0.489 ± 0.013	0.1934 ± 0.0038
	previous $d = 3$ theory	0.4347 ± 0.0020^a	0.73^e	0.56^e	
	ϵ expansion up to $O(\epsilon^2)$	0.42^b	0.90^b	0.38^b	0.17^c
	$1/n$ expansion			0.208^f	
series				0.165^c	
experiment	0.45^h		$1.2 - 1.8^h$		$0.06 - 0.11^i$

^aBagnuls *et al.* [14]

^bBervillier [15]

^cAharony and Hohenberg [18]

^dLiu and Fisher [21]

^eSchloms and Dohm [11]

^fOkabe and Ideura [16]

^gSingsaas and Ahlers [17]

^hHohenberg *et al.* [19]

ⁱBarmatz *et al.* [20]

Table 2: Universal amplitude ratios, Eqs. (6)–(9), for $n = 1, 2, 3$ in three dimensions.

We call attention to the case $n = 2$ (superfluid transition of ^4He) where our new results are

$$A^+/A^- = 1.056 \pm 0.004 \pm 0.002 \quad (11)$$

and

$$R_\xi^T = 0.805 \pm 0.021 \pm 0.001 \quad (12)$$

(the last error bars refer to the uncertainty of α [5]). We see that there is excellent agreement between our value of A^+/A^- and the experimental result $A^+/A^- = 1.054 \pm 0.001$ of LPE [5]. No perfect agreement exists between our R_ξ^T and the previous experimental value $R_\xi^T = 0.85 \pm 0.02$ [17] within the error bars. It remains to be seen whether closer agreement can be achieved by improving the experimental and theoretical accuracy.

Acknowledgement

Support by DLR under contract number 50WM9669 is acknowledged.

References

- [1] V. Privman, P.C. Hohenberg and A. Aharony, in: *Phase Transitions and Critical Phenomena*, ed. by C. Domb and J.L. Lebowitz (Academic Press, London, 1991), Vol. 14, p.1; and references therein.
- [2] G. Ahlers, in: *Quantum Liquids*, ed. by J. Ruvalds and T. Regge (North Holland, Amsterdam, 1978), p. 1; A. Singaas and G. Ahlers, Phys. Rev. **B30**, 5103 (1984).
- [3] J.A. Lipa, V. Dohm, U.E. Israelsson, and M.J. DiPirro, NASA Proposal, NRA 94-OLMSA-05 (1995).
- [4] M. Larson, F.C. Liu, and U.E. Israelsson, Czech. J. Phys. **46**, Suppl. S1, 179 (1996).
- [5] J.A. Lipa, D.R. Swanson, J.A. Nissen, T.C.P. Chui, and U.E. Israelsson, Phys. Rev. Lett. **76**, 944 (1996).
- [6] V. Dohm, J. Low Temp. Phys. **69**, 51 (1987); R. Schloms and V. Dohm, Europhys. Lett. **3**, 413 (1987).
- [7] V. Dohm, in: *Proceedings of the 1997 NASA/JPL Microgravity Fundamental Physics Workshop*, Santa Barbara, May 7-9, 1997, NASA Document D-15677 (1998), p. 189; cond-mat/9803095
- [8] S.A. Larin, M. Mönnigmann, M. Strösser, and V. Dohm, Phys. Rev. **B58** (1998); cond-mat/9711069 and cond-mat/9805028.
- [9] M. Strösser, S. A. Larin and V. Dohm, Nucl. Phys. **B**, to be published; cond-mat/9806103.
- [10] V. Dohm, Z. Phys. **B60**, 61 (1985); R. Schloms and V. Dohm, Nucl. Phys. **B 328**, 639 (1989).
- [11] R. Schloms and V. Dohm, Phys. Rev. **B42**, 6142 (1990); *ibid.* **B46**, 5883 (1992) (E).
- [12] H.J. Krause, R. Schloms and V. Dohm, Z. Phys. **B79** (1990) 287; *ibid.* **B80** (1990) 313 (E).
- [13] S.S.C. Burnett, M. Strösser, and V. Dohm, Nucl. Phys. **B504** [FS] (1997) 665.
- [14] C. Bagnuls, C. Bervillier, D. I. Meiron and B. G. Nickel, Phys. Rev. **B35**, 3585 (1987).
- [15] C. Bervillier, Phys. Rev. **B34**, 8141 (1986).
- [16] Y. Okabe and K. Ideura, Prog. Theory. Phys. **66**, 1959 (1981).
- [17] A. Singaas and G. Ahlers, Phys. Rev. **B30**, 5103 (1984).

- [18] A. Aharony and P. C. Hohenberg, Phys. Rev. **B13**, 3081 (1976).
- [19] P. C. Hohenberg, A. Aharony, B. I. Halperin and E. D. Siggia, Phys. Rev. **B13**, 2986 (1976).
- [20] M. Barmatz, P. C. Hohenberg and A. Kornblit, Phys. Rev. **B12**, 1947 (1975).
- [21] A. J. Liu and M. E. Fisher, Physica **A156**, 35 (1989).
- [22] D. Beysens, A. Bourgou and P. Calmettes, Phys. Rev. **A26**, 3589 (1982).
- [23] A. Kumar, H. R. Krishnamurthy and E. S. R. Gopal, Phys. Rep. **98**, 57 (1983).
- [24] J. A. Lipa and T. C. P. Chui, Phys. Rev. Lett. **51**, 2291 (1983).
- [25] G. Ahlers, private communication.
- [26] T. Takada and T. Watanabe, J. Low Temp. Phys. **49**, 435 (1982).
- [27] A. Kornblit and G. Ahlers, Phys. Rev. **B8**, 5163 (1973).
- [28] R. Guida, J. Zinn-Justin, Nucl. Phys. **B489**, 626 (1997).
- [29] R. Guida, J. Zinn-Justin, preprint cond-mat/9803240v2.

Universelle kritische Phänomene unter Mikrogravitation

Test der Renormierungsgruppentheorie

Kritische Phänomene treten in vielfältiger Form in allen Bereichen der Physik der kondensierten Materie auf. So hat jede Substanz einen flüssigen und gasförmigen Aggregatzustand mit einer kritischen Temperatur T_c , oberhalb derer diese Aggregatzustände nicht mehr unterscheidbar sind. Nahe bei T_c weisen thermodynamische Größen eine singuläre Temperaturabhängigkeit proportional zu $(T-T_c)^{-\alpha}$ mit „kritischen Exponenten“ α auf. Weitere bekannte Beispiele für kritische Temperaturen sind die Curie-Temperatur T_c eines Ferromagneten, die Néel-Temperatur T_N von Antiferromagneten, die Übergangstemperatur T_c von Supraleitern (siehe den Beitrag von W. Metzner) oder die kritische Linie $T_\lambda(P)$ (λ -Linie) von flüssigem ^4He , unterhalb derer ^4He superfluid wird (Bild 1). Analogien zu kritischen Temperaturen können auch im stationären Nichtgleichgewicht auftreten, zum Beispiel beim Laser an der Laserschwelle oder bei der Benard-Instabilität in der Hydrodynamik.

Universalität und Skalenverhalten

Trotz dieser Vielfalt zeichnen sich kritische Phänomene durch substanzunabhängige Gemeinsamkeiten aus: durch Universalität und Skalenverhalten. Das singuläre Verhalten thermodynamischer Größen bei T_c wird durch nur wenige universelle Naturkonstanten (kritische Exponenten und Amplitudenverhältnisse) charakterisiert, die von der mikroskopischen Wechselwirkung unabhängig sind. Das Skalenverhalten impliziert eine erhebliche Vereinfachung in der Beschreibung kritischer Phänomene, beispielsweise die Reduktion von sieben kritischen Exponenten ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \nu, \zeta$) auf nur zwei unabhängige Exponenten oder die Reduktion der thermodynamischen Zustandsgleichung von zwei Variablen auf nur eine (kombinierte) Variable. Die Erklärung dieser Universalität und des Skalenverhaltens durch die so genannte Renormierungsgruppentheorie gehört zu den wichtigsten Erfolgen der Theoretischen Physik der letzten Jahrzehnte (Kenneth G. Wilson, Nobelpreis 1982).

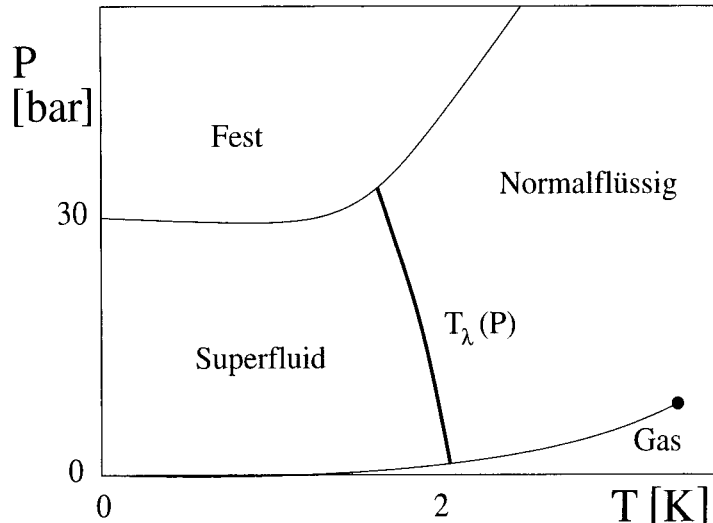


Bild 1: Temperatur-Phasendiagramm von ^4He mit der λ -Linie von kritischen Temperaturen $T_\lambda(P)$ (schematisch).

Die Bedeutung und Anwendung der Konzepte dieser Theorie reicht weit in die Physik der kondensierten Materie und die Elementarteilchenphysik hinein; sie ermöglicht eine systematische Behandlung von Phänomenen, bei denen effektive Wechselwirkungen auf vielen verschiedenen Längenskalen wichtig sind. Dies gilt nicht nur für ideale unendlich große Systeme, sondern auch für reale begrenzte Systeme mit Oberflächeneffekten. Daraus ergibt sich, dass einerseits eine möglichst genaue theoretische Berechnung der universellen Eigenschaften und andererseits eine möglichst präzise experimentelle Überprüfung der vor-

hergesagten Universalität und des Skalenverhaltens in realen Systemen von großem Interesse ist. Diese Überprüfung kann durch numerische Simulationen von Modellsystemen unterstützt werden (siehe den Beitrag von W. Selke).

Test der Universalität am superfluiden Phasenübergang

Eine ideale Testmöglichkeit bietet der superfluide Phasenübergang von ^4He . Hier existiert nicht nur ein einzelner kritischer Punkt bei einem bestimmten kritischen Druck, sondern ein ganzes Kontinuum von kritischen Temperaturen $T_\lambda(P)$ (λ -Linie) in einem großen Druckbereich (Bild 1).

Damit kann ein einfacher Test der Universalität dadurch erfolgen, dass das kritische Verhalten thermodynamischer Größen bei verschiedenen Drücken P entlang der λ -Linie gemessen wird. Der Nachweis der Universalität besteht dann in dem Nachweis der Druckunabhängigkeit der kritischen Exponenten, der Amplitudenverhältnisse sowie der Skalenrelationen.

Aus verschiedenen Gründen lassen sich – bereits unter Normalbedingungen auf der Erde – an der λ -Linie von ^4He kritische Phänomene mit einer um etwa drei Größenordnungen besseren Temperaturauflösung als in anderen Systemen (Festkörpern, gewöhnlichen Flüssigkeiten) bestimmen. Die Begrenzung der Genauigkeit wird nur noch durch die Gravitation auf der Erde bedingt, die zu einem inhomogenen Dichteprofil und somit zu einem inhomogenen Temperaturabstand von der kritischen Temperatur $T_\lambda(P)$ führt. Dies hat eine (unerwünschte) Abrundung der kritischen Singularitäten zur Folge, zum Beispiel für die Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität (Bild 2). Um den störenden Einfluss der Gravitation zu

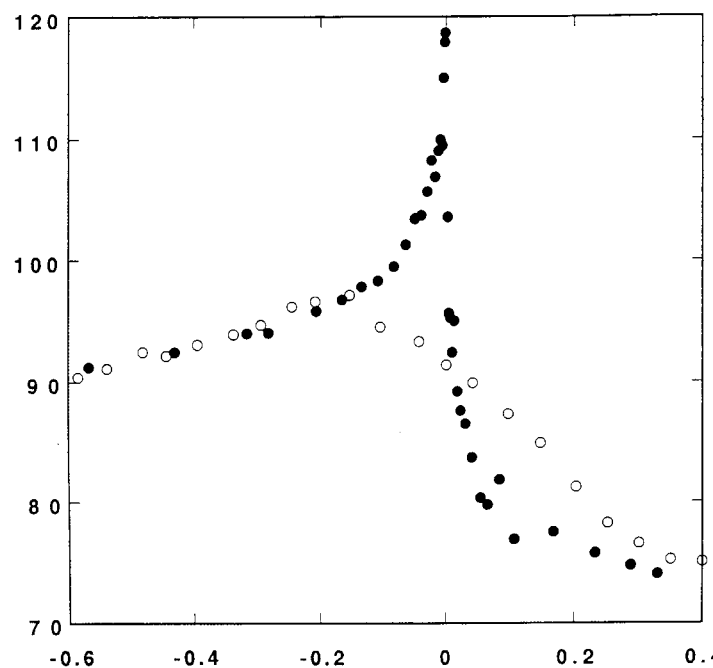
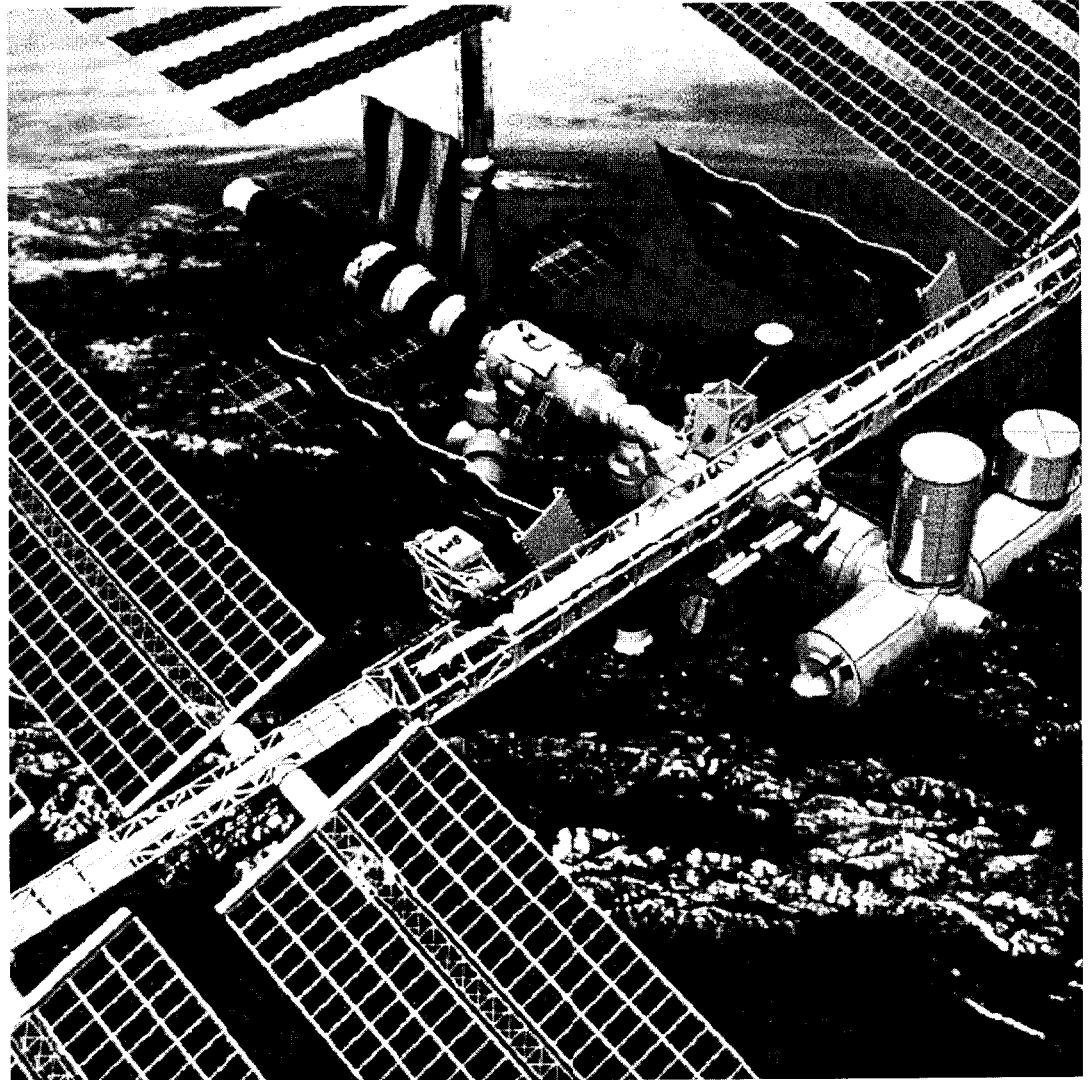


Bild 2: Experimentelle Daten für die spezifische Wärme von ^4He als Funktion von $T - T_\lambda$ in der Nähe von T_λ unter Mikrogravitationsbedingungen (volle Kreise) [Ref. 3] und auf der Erde (offene Kreise). Temperaturskala in Einheiten von Mikrokkelvin, vertikale Skala in Einheiten von $J / \text{Mol Kelvin}$.

Bild 3: Internationale Raumstation.



vermeiden, sind für einen Präzisionstest Mikrogravitationsbedingungen (das heißt Reduktion der Schwerebeschleunigung g auf $10^{-6} g$) eine notwendige Voraussetzung. Dies erlaubt dann eine weitere Steigerung der Präzision der Temperaturauflösung bis zu $T-T_\lambda \approx 10^{-10} K$. Diese Weltraumexperimente sollen auf der Internationalen Raumstation (Bild 3) durchgeführt werden. Sie sind ein wichtiger Teil des Forschungsprogramms der NASA innerhalb der neu gegründeten Disziplin „Fundamental Physics“ unter Mikrogravitationsbedingungen. An den theoretischen Vorhersagen zu diesen Experimenten ist das Institut für Theoretische Physik B der RWTH Aachen wesentlich beteiligt [1]. Dazu sollen drei Beispiele vorgestellt werden:

Wärmekapazität

Zunächst soll die sehr genau messbare Wärmekapazität C von flüssigem ^4He betrachtet werden. Für normalflüssiges und gasförmiges ^4He hat C eine harmlose Temperaturabhängigkeit wie andere Flüssigkeiten und Gase. In der Nähe der Übergangstemperatur $T_\lambda(P) \approx 2K (-271^\circ\text{C})$ jedoch weist die Wärmekapazität eine singuläre Temperaturabhängigkeit der Form

$$C = A^+ |T - T_\lambda|^{-\alpha} + B \text{ für } T \geq T_\lambda$$

und

$$C = A^- |T - T_\lambda|^{-\alpha} + B \text{ für } T \leq T_\lambda$$

auf. Experimente zeigen, dass die Größen B und A^+ vom Druck P abhängen und dass sich A^+ und A^- geringfügig unterscheiden. Von grundlegendem Interesse ist nun die Vorhersage der Renor-

mierungsgruppentheorie, dass sowohl der „kritische Exponent“ α als auch das Amplitudenverhältnis A^+/A^- universelle Konstanten sind, die nicht von der Stärke der Wechselwirkung zwischen den ^4He -Atomen abhängen. Mit zunehmendem Druck P ändert sich der mittlere atomare Abstand zwischen den ^4He -Atomen und somit auch die Stärke der Wechselwirkung. Eine Konsequenz der Universalität ist also, dass sich α und A^+/A^- bei zunehmendem Druck P nicht ändern dürfen. Über diese allgemeine Aussage hinaus liefert die Theorie recht genaue Vorhersagen über die Zahlenwerte, nämlich

$$\alpha = -0.011 \pm 0.004, \\ A^+/A^- = 1.048 \pm 0.003.$$

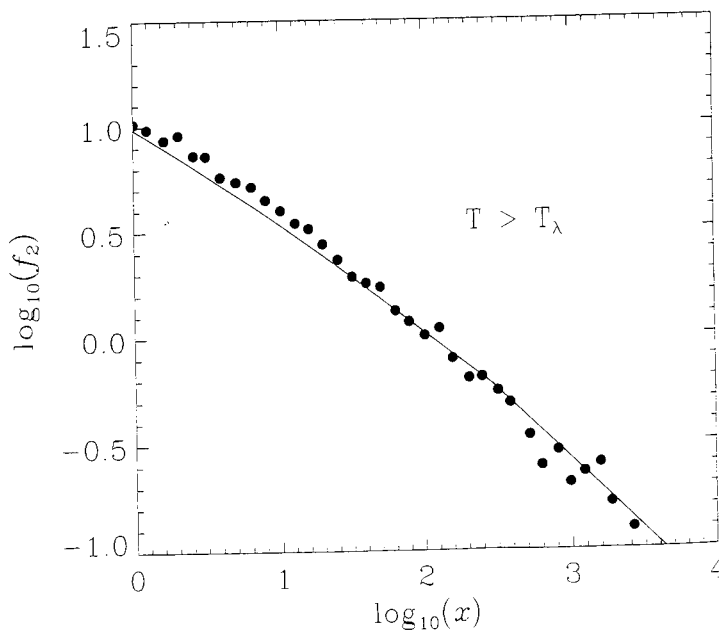
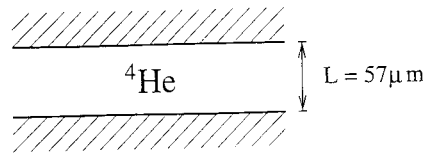
Der letztere Wert wurde erst kürzlich in einer Dissertation [2] am Institut für Theoretische Physik berechnet. Diese theoretischen Vorhersagen sind in guter Übereinstimmung mit den derzeitigen experimentellen Werten [3]

$$\alpha^{\text{exp}} = -0.01056 \pm 0.00038, \\ (A^+/A^-)^{\text{exp}} = 1.0441 \pm 0.0016,$$

die in einem Weltraumexperiment während einer Shuttle-Mission der NASA gemessen wurden. Diese Messungen beschränkten sich aber auf den niedrigsten Druck P (am unteren Ende der λ -Linie). Noch offen ist die Frage der Gültigkeit der Universalität. Dies erfordert neue Messungen bei verschiedenen Drücken P bis hinauf zum oberen Ende der λ -Linie.

Bild 4: Vergleich zwischen Theorie [Refs. 4, 5] und experimentellen Daten [Ref. 3] für die Skalenfunktion $f(x)$ der spezifischen Wärme von ^4He in Plattengeometrie als Funktion von $x = t L^{1/\nu}$ mit Plattenabstand $L = 57 \mu\text{m}$ und reduzierter Temperatur $t = (T - T_\lambda)/T_\lambda$.

Plattengeometrie



Superfluide Dichte

Als weiteres Beispiel soll die ebenfalls genau messbare „superfluide Dichte“ ρ_s im superfluiden Zustand von ^4He unterhalb von T_λ betrachtet werden. In der Nähe von T_λ tritt wiederum eine singuläre Temperaturabhängigkeit der Form

$$\rho_s = A_p |T - T_\lambda|^\nu$$

mit dem kritischen Exponenten ν und der Amplitude A_p auf. Die Renormierungsgruppentheorie sagt die Universalität von ν und des Amplitudenverhältnisses $A_p/(A')^{1/3}$ vorher. Der bisher genaueste Zahlenwert von $A_p/(A')^{1/3}$ wurde wieder am RWTH-Institut berechnet [2]. Darüber hinaus wird ein exakter Zusammenhang („Skalenrelation“) zwischen den kritischen Exponenten α und ν vorhergesagt:

$$2 - \alpha = 3\nu.$$

Diese Vorhersagen sollen mit hoher Präzision auf der Internationalen Raumstation getestet werden.

Skalenverhalten in endlichen Systemen

Eine weitere fundamentale Vorhersage früherer Renormierungsgruppenrechnungen bezieht sich auf den Einfluss von Systembegrenzungen auf kritische Phänomene (zum Beispiel in superfluidem Helium zwischen zwei Platten, Bild 4). Die Vorhersage ist, dass zum Beispiel die Wärmekapazität $C(t, L)$ in charakteristischer Weise von der System-

größe L (Plattenabstand) und dem Temperaturabstand $t = T - T_\lambda$ abhängt, nämlich in Form einer homogenen Funktion zweier Variabler L und t . Beispielsweise wird für die Wärmekapazität die „Skalenform“

$$C(t, \infty) - C(t, L) = L^{\alpha/\nu} f(tL^{1/\nu})$$

erwartet, wobei $f(x)$ eine universelle Funktion nur noch einer Variablen $x = tL^{1/\nu}$ ist. Darüber hinaus ist es möglich, die Form der Funktion $f(x)$ quantitativ zu berechnen. In einer NASA-Shuttle-Mission wurden 1997 die bisher genauesten Experimente zum Test obiger Vorhersage gemacht. Für $T > T_\lambda$ sind die experimentellen Daten in guter Übereinstimmung mit der Renormierungsgruppentheorie [4, 5] (Bild 4), wohingegen für $T < T_\lambda$ erhebliche Abweichungen zwischen Daten und der theoretischen

Skalenstruktur gefunden wurden. Noch wesentlich stärkere Diskrepanzen gibt es hinsichtlich der superfluiden Dichte $\rho_s(t, L)$. Somit ist unklar, ob das in vielen Modellstudien angenommene Skalenverhalten tatsächlich auch in realen begrenzten Systemen gültig ist.

Ausblick

Überraschenderweise konnte vor kurzem nachgewiesen werden [6], dass das Skalenverhalten für endliche Systeme nicht allgemein aus der Renormierungsgruppentheorie hergeleitet werden kann. Insbesondere ist der Einfluss von kritischen Oberflächeneffekten auf das Skalenverhalten begrenzter realer Systeme ein noch weitgehend unerforschtes Gebiet. Weitere Informationen über die Wärmekapazität in begrenzter Geometrie sollen durch neue Weltraumexperimente gewon-

nen werden. Parallel dazu werden am Aachener Institut im Rahmen von Diplom- und Doktorarbeiten analytische Untersuchungen zum Themenbereich kombinierter Oberflächen- und Begrenzungseffekte in der Nähe von kritischen Punkten durchgeführt und mit numerischen Simulationen verglichen. Dies erstreckt sich nicht nur auf statische (zeitunabhängige) Phänomene, sondern auch auf Transportprozesse, wie zum Beispiel kritische Wärmeleitung. Diese Untersuchungen werden von der NASA und dem DLR gefördert.

Autor:

Univ.-Prof. Dr.rer.nat. Volker Dohm ist Inhaber des Lehrstuhls für Theoretische Physik B.

Literatur:

- [1] Dohm, Volker: Forschung unter Weltraumbedingungen, DLRBilanzsymposium, Norderney, 1998, herausgegeben von M. H. Keller, P. R. Sahn, WPF RWTH Aachen (2000).
- [2] Strösser, M.: Dissertation, RWTH Aachen (2000).
- [3] Lipa, J. A.: Phys. Rev. Lett. 76, 944 (1996); 84, 4894 (2000).
- [4] Dohm, Volker: Physika Scripta, T 49, 46 (1993).
- [5] Mohr, U.: Dissertation, RWTH Aachen (2000).
- [6] Chen, X. S.; Dohm, V.: Eur. Phys. J. B 10, 687 (1999); B 15, 2383 (2000).