

# Nichtlineare Optik: Phasenübergänge und Chaos im Laser

V. Dohm  
Institut für Festkörperforschung, Kernforschungsanlage Jülich

1983

- I. Wirkungsweise und Fragestellung
- II. Semiklassisches Lasermodell
- III. Laserschwelle: Phasenübergang 2. Ordnung
- IV. Optische Bistabilität: Phasenübergang 1. Ordnung
- V. Chaos bei großer Pumpstärke: Äquivalenz mit dem Lorenzmodell
- VI. Instabilität bezüglich Pulsausbreitung
- VII. Periodisches Verhalten und Chaos bei kleiner Pumpstärke
- VIII. Nichtlineare Effekte in passiven optischen Systemen

Die Laserphysik [1a] umfaßt ein breites Spektrum verschiedenster Phänomene aus dem Bereich der Optik, Quantenmechanik und Nichtgleichgewichtsstatistik. In diesem Beitrag sollen nur solche Eigenschaften besprochen werden, bei denen die Nichtlinearität der Lasergleichungen den entscheidenden Gesichtspunkt bildet. Es zeigt sich, daß diese Eigenschaften weitgehende Analogien zu den gewöhnlichen Phasenübergängen 1. und 2. Ordnung sowie zu hydrodynamischen Instabilitäten aufweisen [1b,2,3].

## I. Wirkungsweise und Fragestellung

Zunächst sei kurz an die Wirkungsweise eines Lasers erinnert. In einem Resonator (z.B. zwischen zwei parallelen Spiegeln,

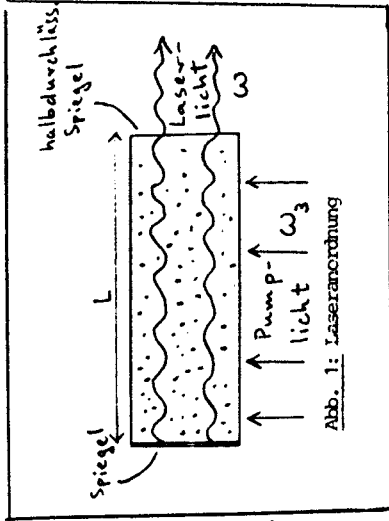


Abb. 1: Laseranordnung

Abb. 1) befindet sich eine makroskopische Zahl  $N$  gleichartiger Laseratome. Wesentlich für den Laserprozess sind zwei atomare Energieniveaus  $E_1$  und  $E_2$  sowie eine "Pumpe" (z.B. eine Lichtquelle geeigneter Frequenz  $\omega_3$ ), die die Atome aus dem Grundzustand  $E_1$  (z.B. über ein Hilfsniveau  $E_3$ , Abb.2) in das Niveau  $E_2 > E_1$  anregen kann. Beim spontanen Zerfall einiger angeregter Atome in den Grundzustand werden

Photonen der Energie  $\hbar\omega = E_2 - E_1$  ausgestrahlt. Über den Prozeß der stimulierten Emission können diese angeregten die übrigen angeregten Atome zur zusätzlichen Aussendung von Licht (Photonen) derselben Frequenz und Ausbreitungsrichtung veranlassen. Die Spiegel dienen zur Verstärkung und somit zur Selektion einer bestimmten Ausbreitungsrichtung und Wellenlänge  $\lambda$  des Lichts (Modenselektion); im Beispiel von Abb.1 ist diese Mode eine stehende Welle senkrecht zur Spiegelebene mit der Wellenlänge  $\lambda/2 = L/n$  ( $n$ =ganze Zahl), die über den anpaßbaren Spiegelabstand  $L$  auf die atomare Frequenz  $\omega$  abstimbar ist. Wenn hinreichend viele Atome angeregt sind, d.h. oberhalb einer gewissen Schwellpumpleistung, überwiegt der Prozeß der stimulierten Emission gegenüber der Absorption durch nichtangeregte Laseratome und gegenüber Dämpfungseffekten (endliche Resonatorgüte). Dann tritt Laserlicht der Frequenz  $\omega$  mit makroskopischer Intensität  $I \sim N$  auf, das sich durch hohe

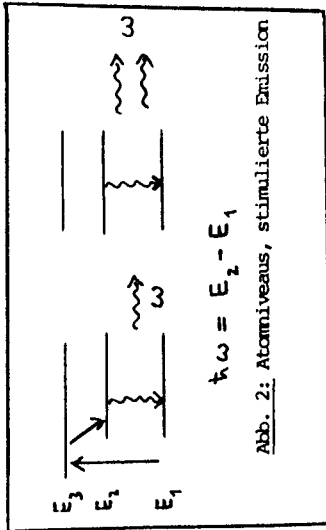


Abb. 2: Atomniveaus, stimulierte Emission

Kohärenz (raum-zeitlich feste Phasenbeziehung der Lichtamplitude) und geringe Linienbreite auszeichnet.

Man unterscheidet den kontinuierlich arbeitenden (cw) Laser (bei zeitlich konstanter Pumpleistung) und den Laser im Pulsbetrieb (mit periodischen Pumpulsen oder mit periodisch geänderter Resonatorgüte). Wir werden den einfacheren kontinuierlichen Laserbetrieb behandeln. Ferner muß man das Anfangsverhalten (Einschwingvorgänge) und das Langzeitverhalten (etwa  $t > 10^{-5}$  sec) des Lasers nach Einschalten der Pumpe unterscheiden. In diesem Beitrag soll nur das Langzeitverhalten und der (eventuelle) Übergang in einen stabilen stationären Zustand besprochen werden. Von Interesse ist dabei die Frage, wie sich der stationäre Zustand als Funktion der Pumpstärke in der Umgebung der Schwelle ändert (stetig oder unstetig). Schließlich werden wir die Frage der Stabilität des stationären Zustandes und die Möglichkeit für das spontane Auftreten von periodischen oder chaotischen Laserlichtpulsen untersuchen.

II. Semiklassisches Lasermodell

Wir betrachten als Lasermodell ein System aus gleichartigen 2-Niveau-Atomen, die mit dem Lichtfeld (elektrische Feldstärke  $\underline{E}$ ) wechselwirken. Das Atomsystem kann durch die Polarisation  $\underline{P}$  und die Inversion  $D = N_2 - N_1$  (= Differenz der atomaren Besetzungszahlen im oberen bzw. unteren Niveau) beschrieben werden. Ebenso wie für die ortsabhängige Feldstärke  $\underline{E}(\underline{x})$  verwenden wir für die atomaren Größen eine Kontinuumsbeschreibung  $\underline{P}(\underline{x})$  und  $D(\underline{x})$ , die man nach einer Mittelung über die Atome im Volumenelement  $\Delta V$  um die Stelle  $\underline{x}$

$$\underline{P}(\underline{x}) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\mu \in \Delta V} \underline{P}(\mu), \quad D(\underline{x}) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\mu \in \Delta V} D(\mu) \quad (1)$$

erhält. Dabei bedeuten  $\underline{P}(\mu)$  und  $D(\mu)$  das Dipolmoment bzw. die Inversion des  $\mu$ -ten Atoms. Während  $D$  eine typisch quantenmechanische Größe ist und eine quantenmechanische Behandlung des Atomsystems erfordert, kann die Feldstärke  $\underline{E}$  des

Lichts als klassische Größe aufgefaßt und durch die Maxwellgleichungen beschrieben werden (auf die Photonstatistik, Liniensbreite und Phasenfluktuationen des Laserlichts kommt es für unsere Fragestellung nicht an). Im folgenden sei immer eine eindimensionale Ortsabhängigkeit sowie linear polarisiertes Licht angenommen, so daß es genügt, mit skalaren Größen  $E(x,t)$  und  $P(x,t)$  zu arbeiten. Aus den Maxwellgleichungen folgt [1]

$$\ddot{E} + 2\kappa\dot{E} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} E = -4\pi\dot{P} \quad (2)$$

wobei  $\kappa$  ein Maß für die inverse Resonatorgüte und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist. Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen für  $P$  und  $D$  muß man auf die Dichtematrixgleichung des 2-Niveau-Atomsystems zurückgehen. Mittelung über das Atomsystem liefert dann (siehe z.B. Kap. VII von [1] und App. A von [4])

$$\ddot{P} + 2\gamma_1\dot{P} + \omega^2 P = -\tilde{g}\omega ED \quad (3)$$

$$\dot{D} + \gamma_1(D - D_0) = \frac{2}{\hbar\omega} E\dot{P} \quad (4)$$

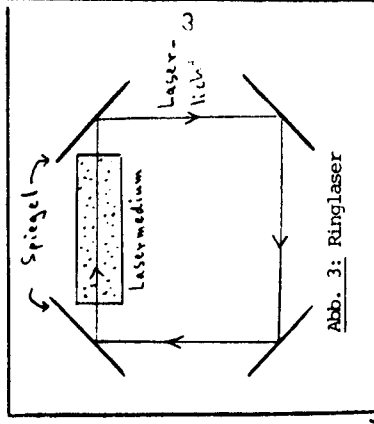
mit nichtlinearen Termen auf der rechten Seite.  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  sind effektive atomare Dämpfungskonstanten (infolge von Stößen mit anderen Atomen etc.).  $D_0$  ist die Inversion, die sich bei Abwesenheit des Lichtfeldes  $E$  für  $t \rightarrow \infty$  einstellen würde.  $D_0$  ist deswegen ein Maß für die Pumstärke. Weit unterhalb der Schwelle ist  $D_0 < 0$ , wechselt sein Vorzeichen in Schwellennähe und ist positiv oberhalb der Schwelle.

Über (3) wirkt  $E$  auf  $P$ , und  $P$  wirkt umgekehrt als Quellterm in (2) auf  $E$ . Entscheidend ist die nichtlineare Kopplung  $\tilde{g}ED$  in (3), deren Vorzeichen von  $D$  abhängt. Diese Kopplung ist rein quantenmechanischer Natur; die klassische Theorie eines schwingenden Dipols hätte nur einen Term  $\sim E$  ergeben (siehe Glg. VII. 1.12 von [1a]). Die Kopplung  $\tilde{g}$  ist proportional zum Betragsquadrat des atomaren Dipolmatrixelements.

Im folgenden soll hauptsächlich der Fall eines Einmodenbetriebs betrachtet werden, in dem  $E$  und  $P$  die Ortsabhängigkeit einer laufenden Welle

$$E(x,t) = \tilde{E}(t) e^{i(kx - \omega t)} + c.c. \quad (5)$$

$$P(x,t) = \tilde{P}(t) e^{i(kx - \omega t)} + c.c. \quad (6)$$



( $k = \omega/c$ ) haben soll. Dies kann in einem Ringlaser realisiert werden (Abb.3), wogegen die Geometrie von Abb.1 die (rechnerisch etwas unbequemere) Ortsabhängigkeit  $\sim \sin kx$  einer stehenden Welle bedingt hätte. Die Lichtfrequenz  $\omega$  in (5), (6) soll auf die atomare Frequenz  $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar$ , die in (3), (4) auftritt, abgestimmt sein. Mit dem Ansatz (5), (6) soll zugleich eine Aufteilung in einen schnell oszillierenden Anteil  $\sim e^{i\omega t}$ ,  $\omega \sim 10^{15} \text{ sec}^{-1}$ , und in langsam veränderliche Amplituden  $\tilde{E}(t)$  und  $\tilde{P}(t)$  erfolgen (Abb.4), deren Zeitabhängigkeit auf einer durch  $\kappa, \gamma_1, \gamma_2$  bestimmten Zeitskala abläuft. (Größenordnung:  $\kappa, \gamma_1, \gamma_2 \sim 10^7 - 10^9 \text{ sec}^{-1} \ll \omega$ ). Mit der Näherung  $|\dot{\tilde{E}}| \ll \omega |\tilde{E}|$ ,  $|\dot{\tilde{P}}| \ll \omega |\tilde{P}|$  und

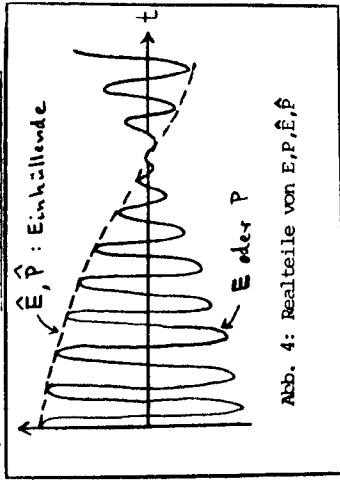


Abb. 4: Realteile von  $E, P, \dot{E}, \dot{P}$

(2) - (4) folgt nach Einsetzen von (5) und (6) in

$$\dot{\tilde{E}} = -\kappa\tilde{E} + 2\pi i\omega\tilde{P} \quad (7)$$

$$\dot{\tilde{P}} = -\gamma_2\tilde{P} - (i\tilde{g}/2)\tilde{E}D \quad (8)$$

$$\dot{D} = -\gamma_1(D-D_0) + (2i/\hbar)(\hat{E}\hat{P}^* - \hat{E}^*\hat{P}) \quad (9)$$

Als weitere Näherung wurden auf der rechten Seite von (9) hochfrequente Terme  $\sim e^{+2i\omega t}$  vernachlässigt. Mit den Variablen

$$\tilde{E} = \hat{E}(2\pi\hbar\omega)^{-1/2}, \quad \tilde{P} = i\hat{P}(2/\hbar\omega)^{1/2} \quad (10)$$

und der Kopplung

$$g = \sqrt{\omega\pi\tilde{g}} \quad (11)$$

lassen sich (7) - (9) in der einfacheren Form

$$\dot{\tilde{E}} = -\kappa\tilde{E} + g\tilde{P} \quad (12)$$

$$\dot{\tilde{P}} = -\gamma_2\tilde{P} + g\tilde{E}D \quad (13)$$

$$\dot{D} = -\gamma_1(D-D_0) - 2g(\tilde{E}\tilde{P}^* + \tilde{E}^*\tilde{P}) \quad (14)$$

schreiben.  $\tilde{E}$  und  $\tilde{P}$  sind i.a. komplex, wohingegen  $D$  reell ist. Dies sind die Grundgleichungen der "semiklassischen" Theorie eines Einmodellasers. Wegen der Ortsunabhängigkeit kann man mit diesen Gleichungen keine Fragen der räumlichen Kohärenz, Pulsausbreitung, Mehrmodenbetrieb etc. behandeln. Ferner sind (12) - (14) deterministische Gleichungen, d.h. sie beschreiben nicht die statistischen Eigenschaften des Laserlichts und der Laseratome. Vielmehr muß man (12) - (14) als Mittelwertgleichungen (ohne Fluktuationen) auffassen, die man durch Mitteilung über die mikroskopischen Bewegungsgleichungen bei Vernachlässigung der Atom-Licht-Korrelationen herleiten kann [1]. Die wesentliche Eigenschaft, die uns hier interessiert, ist die Nichtlinearität der Lasergleichungen; deren Konsequenz für das Langzeitverhalten ( $t \rightarrow \infty$ ) der Amplituden  $\tilde{E}(t)$ ,  $\tilde{P}(t)$  und  $D(t)$  werden im folgenden besprochen.

III. Laserschwelle: Phasenübergang 2. Ordnung

Wir untersuchen nun, in welche stationären Zustände der Laser (bei zeitunabhängigem  $D_0$ ) übergehen kann. Setzt man  $\dot{\tilde{E}} = \dot{\tilde{P}} = \dot{D} = 0$ , so ergeben sich zwei stationäre Lösungen. Eine triviale Lösung ist offensichtlich

$$\tilde{E} = \tilde{P} = 0, \quad D = D_0 \quad (15)$$

Eine weitere Lösung mit nichtverschwindenden Amplituden

$$\tilde{E} = |\tilde{E}|e^{i\theta}, \quad \tilde{P} = |\tilde{P}|e^{i\theta} \quad \text{lautet}$$

$$|\tilde{E}|^2 = \frac{g^2}{\kappa^2} |\tilde{P}|^2 = \frac{\gamma_1}{4\kappa} (D_0 - D_S) \quad (16a)$$

$$D = D_S \quad (16b)$$

wobei

$$D_S \equiv \frac{\kappa\gamma_2}{g^2} \quad (17)$$

die Inversion an der Laserschwelle bedeutet. Die Lösung (16) existiert nur für  $D_0 \geq D_S$ , wohingegen (15) für alle  $D_0$  existiert. Eine lineare Stabilitätsanalyse zeigt, daß (15) für  $D_0 < D_S$  die stabile stationäre Lösung ist. An der Laserschwelle  $D_0 = D_S$  setzt eine Bifurkation ein (Abb. 5a,b). Oberhalb der Schwelle wächst das Laserlicht

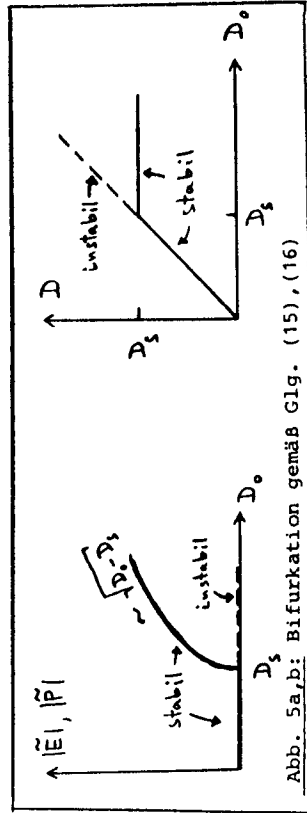
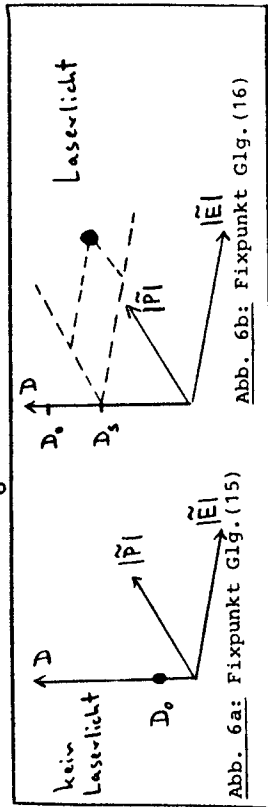


Abb. 5a,b: Bifurkation gemäß Glg. (15), (16)

gemäß (16a) auf makroskopische Intensität. Außerdem tritt eine

makroskopische Polarisation der Laseratome auf. Im Raum der Variablen  $\vec{E}, \vec{P}, D$  stellen (15) und (16) Fixpunkte der Lasergleichungen (12) - (14) dar, die für  $D_0 \leq D_g$  bzw.  $D_g < D_0 < D$  stabil sind (Abb. 6a, b, vgl. Abb. 4a, b von [5]). (Eine eventuelle Stabilitätsgrenze bei  $D_0 = D^{(1)}$  wird in Kap. V



untersucht.) Um zu zeigen, daß die Nichtlinearität der Lasergleichungen für die Bifurkation verantwortlich ist, betrachten wir den (realistischen) Fall  $\gamma_1, \gamma_2 \gg \kappa$ . Dann relaxieren  $\vec{P}$  und  $D$  schnell auf quasistationäre Werte, die durch den (langsam veränderlichen) momentanen Wert der Lichtamplitude  $\vec{E}(t)$  bestimmt sind. Aus (13) und (14) ergibt sich für  $\vec{P} \approx 0, \dot{D} \approx 0$

$$P = \frac{g}{\gamma_2} \vec{E}D, \quad D = \frac{D_0}{1 + \beta |\vec{E}|^2}, \quad \beta = \frac{4g^2}{\gamma_1 \gamma_2}, \quad (18)$$

somit erhält man durch Einsetzen von (18) in (12) die nichtlineare Bewegungsgleichung

$$\dot{\vec{E}} = -\kappa \vec{E} \left( 1 - \frac{D_0/D_g}{1 + \beta |\vec{E}|^2} \right). \quad (19)$$

In Schwellennähe wird daraus

$$\dot{\vec{E}} = -\frac{\kappa}{D_g} \vec{E} (D_s - D_0 + D_0 \beta |\vec{E}|^2). \quad (20)$$

Dies entspricht der Bewegungsgleichung eines anharmonischen Oszillators

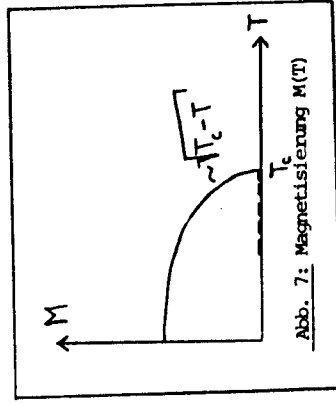
$$\ddot{x}^{-1} (\ddot{x} + \Gamma \dot{x}) = -\kappa \frac{\partial}{\partial \vec{E}^*} V(\vec{E}) \quad (21)$$

im überdämpften Fall ( $|\ddot{\vec{E}}| \ll \Gamma |\dot{\vec{E}}|$ ) mit dem anharmonischen Potential

$$V(\vec{E}) = \frac{D-D_0}{D_0} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2} \frac{D_0 \beta}{D_g} |\vec{E}|^4. \quad (22)$$

Der nichtlineare Term in (20) führt zur Bifurkation (Stabilität einer Lösung mit  $|\dot{\vec{E}}| > 0$ ), sobald  $D_0 > D_g$  ist.

Die Abbildung 5a für die Amplituden  $|\vec{E}|$  oder  $|\dot{\vec{P}}|$  erinnert stark an das Verhalten der Magnetisierung im Falle eines kontinuierlichen Phasenübergangs ("2. Ordnung") bei der Curie-Temperatur  $T_C$  (Abb. 7). Im Rahmen der Molekularfeldnäherung (siehe Beitrag XVIII von Herrn Selke) ergeben sich quantitative Analogien zwischen Laser und Magneten, von denen nur einige in der folgenden Liste gegenübergestellt sind [6, 7]:



MAGNET	LASER
$T_C - T$	$D_0 - D_g$
Magnetisierung M	Polarisation $ \vec{P} $ oder Lichtamplitude $ \vec{E} $
Freie Energie $F(M) = \frac{1}{2}(T - T_C)M^2 + \frac{u}{4}M^4$	Potential $V(\vec{E}) = (D - D_0)  \vec{E} ^2 + \frac{1}{2} D_0 \beta  \vec{E} ^4$
Gleichgewichtsbedingung $\frac{\partial F}{\partial M} = 0$	Stationaritätsbedingung $\frac{\partial V}{\partial \vec{E}^*} = 0$
Zustandsgleichung	
$0 = M(T - T_C + u M^2)$	$0 =  \vec{E}  (D - D_0 + D_0 \beta  \vec{E} ^2)$

Diese Analogien lassen sich auch auf die Orts- und Zeitabhängigkeit von kritischen Fluktuationen erweitern [7,8]. Ferner kann man im Rahmen eines exakt löslichen mikroskopischen Lasermodells zeigen, daß die Teilchenzahl  $N$  (Zahl der Laseratome bzw. Zahl der Elementarmagnete) sowie der "thermodynamische Limes" ( $N \rightarrow \infty$ ) im Laser und im Magneten eine ähnliche Rolle für die Schärfe des Übergangs an der Schwelle bzw. bei  $T_c$  spielen [9,10]. Alle diese Analogien berechtigen dazu, die Laserschwelle als kritischen Punkt eines Phasenübergangs 2. Ordnung aufzufassen. Dies gilt ebenso für die Bénard-Instabilität [2] (siehe Kap. V und Beitrag XIII von Herrn Saito). Ein wesentlicher (quantitativer) Unterschied zu üblichen Phasenübergängen besteht allerdings darin, daß die Randbedingungen (Laserspiegel bzw. Flüssigkeitsbehälter im Bénard-Problem) einen starken Einfluß ausüben können. So ist beim Laser der Übergang an der Schwelle trotz makroskopischer Teilchenzahl  $N \gg 1$  oft nicht "scharf", wie in Abb.6 gezeichnet, sondern stärker "verschmiert" als bei Magneten mit vergleichbarer (endlicher) Teilchenzahl  $N$ . Diese Rundungseffekte hängen bei Nichtgleichgewichtssystemen (mit langreichweitigen effektiven Wechselwirkungen) eben nicht nur von  $N$ , sondern auch direkt von den Randbedingungen ab (endliche Spiegelgüte beim Laser). Weitere Effekte der Randbedingungen: siehe Kap. VI und Beitrag XXII.

#### IV. Optische Bistabilität: Phasenübergang 1. Ordnung

Wir betrachten nun einen Laser, bei dem sich zwischen dem aktiven (bepumpten) Lasermaterial und den Spiegeln noch eine lichtabsorbierende Substanz befindet. Dieser "Absorber" soll eine Sättigungseigenschaft haben, nämlich er soll für große Lichtintensität praktisch nicht mehr absorbieren, d.h. transparent werden. Ein derartiger "sättigbarer Absorber" kann z.B. durch zusätzliche 2-Niveau-Atome realisiert werden, deren Niveauunterschied  $\Delta E$  ungefähr mit der Laserlichtfrequenz  $\omega$  in Resonanz ist und die sich im Grundzustand befinden (die Absorberatome sollen also im Gegensatz zu den laseraktiven Atomen nicht durch eine Pumpe angeregt werden). Die Absorberatome ab-

sorbieren nur solange die Lichtintensität, bis sie alle angeregt sind, verlieren dann aber ihre Absorptionseigenschaft. Es ist plausibel, daß ein solcher sättigbarer Absorber nicht das Einsetzen der makroskopischen Laserstrahlung verhindert, sondern nur eine größere Schwellenpumpe erfordert. Darüber hinaus tritt der interessante Effekt auf, daß eine qualitative Änderung der Art der Schwelle erfolgen kann: Die Lichtintensität kann sich an der Schwelle diskontinuierlich als Funktion der Pumpstärke ändern, wie im folgenden gezeigt wird. Dies führt dann zur "optischen Bistabilität".

Das bisherige semiklassische Lasermodell ohne Absorber läßt sich sofort auf den jetzigen Fall erweitern. Kennzeichnet man die den Absorberatomen entsprechenden Größen durch Querstriche, so lauten die semiklassischen Lasergleichungen statt (12) - (14)

$$\dot{\tilde{E}} = -\kappa \tilde{E} + g \tilde{P} + \tilde{g} \tilde{P} \quad , \quad (23)$$

$$\dot{\tilde{P}} = -\gamma_2 \tilde{P} + g \tilde{E} D \quad , \quad (24a)$$

$$\dot{\tilde{P}} = -\tilde{\gamma}_2 \tilde{P} + \tilde{g} \tilde{E} D \quad , \quad (24b)$$

$$\dot{D} = -\gamma_1 (D - D_0) - 2g (\tilde{E} \tilde{P} + \tilde{E} \tilde{P}) \quad , \quad (25a)$$

$$\dot{D} = -\tilde{\gamma}_1 (\tilde{D} - \tilde{D}_0) - 2g (\tilde{E} \tilde{P} + \tilde{E} \tilde{P}) \quad . \quad (25b)$$

Hier haben wir exakte Abstimmung zwischen Lichtfrequenz  $\omega$  und dem Niveauunterschied  $\Delta E = \hbar \omega$  und  $E_2 - E_1 = \hbar \omega$  der Absorberatome bzw. der laseraktiven Atome angenommen. Die Dämpfungskonstanten  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$  und die Absorberkopplung  $\tilde{g}$  sollen von  $\gamma_1, \gamma_2$  bzw.  $g$  verschieden sein. Der variable Kontrollparameter ist nur  $D_0$  (Pumpstärke), während  $\tilde{D}_0$  eine Konstante bildet.  $\tilde{D} < 0$  beschreibt die negative Inversion der (ungepumpten) Absorberatome, die sich bei Abwesenheit von  $\tilde{E}$  im Grundzustand befinden.

Wir untersuchen nun den Effekt der Absorberatome auf die Laserschwelle. Im stationären Fall kann man  $\dot{P}, \dot{D}, \dot{D}$  eliminieren. Dies führt auf

$$0 = |E| \left\{ 1 - \frac{D_0/D_s}{1+a|E|^2} - \frac{\bar{D}_0/\bar{D}_s}{1+a|E|^2} \right\} \quad (26)$$

$$= |\dot{E}| \{ (A-D_0 + B|\dot{E}|^2 + C|\dot{E}|^4 + \dots) \} \quad (27)$$

$$= \frac{\partial}{\partial |\dot{E}|} V(|\dot{E}|) \quad (28)$$

mit dem Potential

$$V(|\dot{E}|) = \frac{1}{2} (A-D_0) |\dot{E}|^2 + \frac{1}{4} B |\dot{E}|^4 + \frac{1}{6} C |\dot{E}|^6 + \dots \quad (29)$$

In (27) haben wir hinreichend kleine  $|\dot{E}|$  vorausgesetzt (Schwellennähe). Der Zusammenhang der Parameter  $a, \bar{a}, D_s, \bar{D}_s$  sowie  $A, B, C$  mit den in (23)-(25) auftretenden Parametern ist leicht zu berechnen [11], ist für uns aber hier uninteressant. Wesentlich ist lediglich der folgende Absorbereffekt: Bei hinreichend großem  $\bar{a}/a \sim \bar{g}^2/g^2$  ist der Koeffizient  $B$  in (27), (29) negativ, wohingegen  $A$  und  $C$  positiv sind:

$$A > 0, C > 0, B < 0. \quad (30)$$

Die Negativität von  $B$  erfordert, daß auch ein Term 6. Ordnung in  $V(|\dot{E}|)$ , (29), mitberücksichtigt werden muß, im Gegensatz zum Potential (22) ohne Absorber. Eine stabile stationäre Lösung  $|\dot{E}|$  entspricht einem Minimum des Potentials. Ob  $|\dot{E}|=0$  oder positiv ist, läßt sich am besten mit Hilfe von Abb.8 qualitativ gezeichnet, wo  $V(|\dot{E}|)$  für verschiedene  $D_0$  qualitativ gezeichnet ist (siehe auch [12]). Es ergeben sich

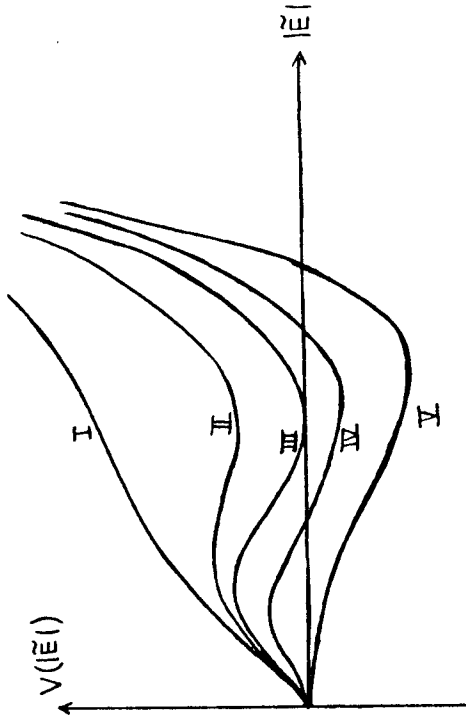


Abb. 8: Laserpotential (29) für verschiedene  $D_0$

mit wachsender Pumpstärke fünf qualitativ verschiedene Fälle (I) - (V):  
 Weit unterhalb der Schwelle (I) existiert nur eine einzige stationäre Lösung  $\dot{E}=0$ , die auch stabil ist. In den Fällen (II)-(V) existieren stationäre Lösungen  $|\dot{E}|=0$  und  $|\dot{E}|>0$ . Im Fall (V) ( $A-D_0 < 0$ , weit oberhalb der Schwelle) ist  $|\dot{E}|=0$  eine instabile Lösung, nur  $|\dot{E}|>0$  ist stabil. Im Fall  $|\dot{E}|=0$  ist  $\dot{E}=0$  global stabil (absolutes Minimum) und  $|\dot{E}|>0$  nur lokal stabil; bei Berücksichtigung von Fluktuationen hat der Zustand  $|\dot{E}|>0$  deswegen nur eine endliche Lebensdauer, d.h. er wird "metastabil". Ebenso ist im Falle (IV) die Lösung  $\dot{E}=0$  metastabil und  $|\dot{E}|>0$  global stabil. Im Spezialfall III koexistieren zwei stabile Lösungen  $\dot{E}=0$  und  $|\dot{E}|>0$  (sogenannte optische Bistabilität). In Abb.9 sind die stabilen Lösungen

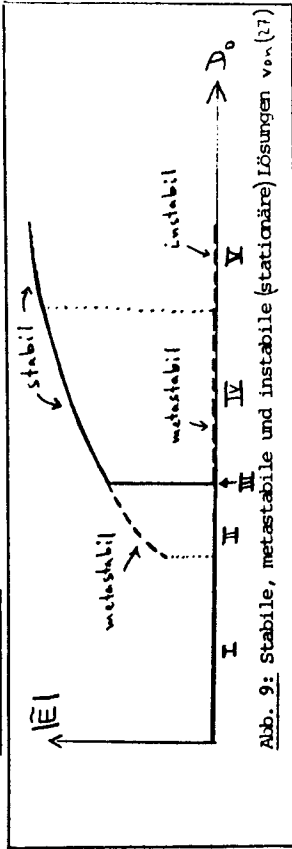


Abb. 9: Stabile, metastabile und instabile (stationäre) Lösungen von (27)

(volle Kurve) und die metastabilen bzw. instabilen Lösungen (gestrichelt) für  $|\vec{E}|$  gezeichnet. An der Schwelle ( $D_0 = D_{III}$ ) ändert sich  $\vec{E}$  unstetig. Im Experiment kann optische Bistabilität in einem endlichen Bereich um die Laserschwelle auftreten, weil die metastabilen Zustände eine gewisse endliche Lebensdauer haben. Dies führt zu Hystereseeffekten, ähnlich wie dies bei diskontinuierlichen Phasenübergängen ("1. Ordnung") z.B. eines Magneten bekannt ist. In

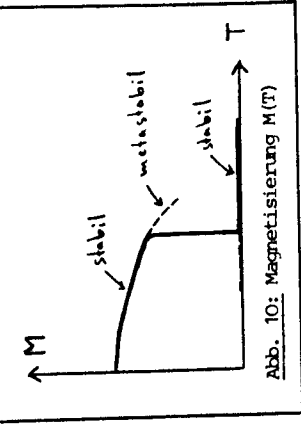


Abb. 10: Magnetisierung M(T)

Abb.10 ist die Temperaturabhängigkeit der Magnetisierung im Falle eines Phasenübergangs 1. Ordnung qualitativ gezeichnet. Die Analogie zur optischen Bistabilität ist evident. Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß der Übergang an der Laserschwelle als Phasenübergang 1. oder 2. Ordnung aufgefaßt werden kann, je nachdem der Übergang unstetig (Laser mit sättigbarem Absorber) oder stetig (Laser ohne Absorber) ist. Ähnliche Phänomene treten auch in anderen nichtlinearen optischen Systemen auf (siehe Kapitel VIII).

V. Chaos bei großer Pumpstärke: Äquivalenz mit dem Lorenzmodell

Im Beitrag XII von Herrn Saito wurde das Lorenzmodell [13] für die thermische Konvektion einer Flüssigkeit eingeführt. Die Zeitabhängigkeit der langsam veränderlichen Amplituden  $X, Y, Z$  gewisser Moden des Geschwindigkeits- bzw. Temperaturfeldes wird in diesem Modell durch

$$\frac{d}{dt} X = -\sigma X + \sigma Y \quad (31)$$

$$\frac{d}{dt} Y = -Y + X(r-Z) \quad (32)$$

$$\frac{d}{dt} Z = -bZ + XY \quad (33)$$

beschrieben (vgl. (11)-(13) von Beitrag XIII ). Die Struktur dieser Gleichungen ist der Struktur der semiklassischen Laser-gleichungen (12) - (14) sehr ähnlich. Tatsächlich besteht eine exakte Äquivalenz [14], wenn man den Ansatz

$$\vec{E} = e^{i\theta} \hat{E}, \quad \vec{P} = e^{i\theta} \hat{P} \quad (34)$$

mit reellem  $\hat{E}, \hat{P}$  macht und die folgende einfache Umskalung vornimmt:

$$\hat{E} = (\gamma_1 \gamma_2 / 4g^2 b) X, \quad \hat{P} = (\kappa^2 \gamma_1 \gamma_2 / 4g^4 b)^{1/2} Y \quad (35)$$

$$D - D_0 = -(\kappa \gamma_2 / g^2) Z, \quad t = (\sigma / \kappa) T, \quad r = D_0 / D_S.$$

Es bleibt lediglich zu zeigen, wann der Ansatz (34) mit derselben Phase  $\theta$  für  $\vec{E}$  und  $\vec{P}$  gerechtfertigt ist. Im allgemeinen sind ja die komplexen Größen  $\vec{E}$  und  $\vec{P}$  in der Form

$$\vec{E}(t) = e^{i\psi(t)} |\vec{E}(t)|, \quad \vec{P}(t) = e^{i\varphi(t)} |\vec{P}(t)| \quad (36)$$

mit verschiedenen Phasen  $\psi(t)$  und  $\varphi(t)$  schreibbar. Man kann aber zeigen [15], daß für  $t \rightarrow \infty$   $\psi(t)$  und  $\varphi(t)$  gleich werden, so daß (34) in diesem Grenzfall unabhängig von den Anfangsbedingungen erfüllt ist. Somit haben das Lorenzmodell und das semiklassische 1-Moden-Lasermodell ein identisches Langzeitverhalten, abgesehen von einfachen Skalenfaktoren gemäß (35). Man kann also alle Ergebnisse von Beitrag XIII direkt auf den Einmodenlaser übertragen. Die äquivalenten Größen werden in der folgenden Liste einander gegenübergestellt:



FLÜSSIGKEIT	EINMODENLASER
relative Rayleighzahl $r$	relative Pumpstärke $D_0/D_s$
$r < 1$ : Flüssigkeit ruht $X = 0$	$D_0 < D_s = \kappa \gamma_2 / g^2$ kein Laserlicht, $\tilde{E} = 0$
$r > 1$ : Konvektion stationärer Zustand	$D_0 > D_s$ : Laserlicht stationärer Zustand stabil

$\sigma > b + 1$   
 $r > r(1)$   
 $r(1) = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-1-b}$   
 nichtperiodische, irreguläre Trajektorien (Chaos) trotz zeitlich konstanter Rayleighzahl  $r$   
 $\kappa > \gamma_1 + \gamma_2$   
 $D_0 > D(1)$   
 $D(1) = \frac{\kappa^2(\kappa + \gamma_1 + 3\gamma_2)}{g^2(\kappa - \gamma_1 - \gamma_2)}$   
 Laserlichtpulse mit chaotischer Zeitabhängigkeit trotz zeitlich konstanter Pumpstärke  $D_0$

Bei weiterer Erhöhung von  $r$  bzw.  $D_0$  treten weitere Instabilitäten auf (siehe Beitrag XIII). Die Bedingung  $\kappa > \gamma_1 + \gamma_2$  ist normalerweise für übliche Laser nicht erfüllt, kann aber durch Verschlechterung der Resonatorgüte (Spiegelreflexionsvermögen) realisiert werden. Es ist bekannt, daß sogar für  $r < r(1)$  der stationäre Zustand des Lorenzmodells instabil und dementsprechend werden kann ("metastabiles Chaos") [16] und dementsprechend auch für  $D_0 < D(1)$  1-Mode-Laserlichtpulse mit chaotischer Zeitabhängigkeit auftreten können. Experimentell sind unregelmäßige Lichtpulse ("Spikes") in Lasern wohl bekannt. Ob ihr Auftreten mit den obigen Instabilitäten zu erklären ist, ist eine noch nicht geklärte Frage.

Die Entdeckung der Instabilität der stationären Lösung bei  $D_0 = D(1)$  erfolgte in der Lasertheorie [17] unabhängig von der entsprechenden Entdeckung im Lorenzmodell [13]. Die chaotische Natur der 1-Mode-Lichtpulse für  $D_0 > D(1)$  war aber damals in [17] noch unbekannt und wird erst durch die oben gezeigte Äquivalenz [14] mit dem Lorenzmodell deutlich.

VI. Instabilität bezüglich Pulsausbreitung

Bisher haben wir uns auf Instabilitäten bezüglich der Zeitabhängigkeit bei vorgegebener Ortsabhängigkeit (1 Mode) des Lichtfeldes beschränkt. Es ist naheliegend zu fragen, ob der stationäre 1-Mode-Betrieb nicht auch bezüglich räumlicher Fluktuationen instabil werden kann. Diese Frage kann man nur untersuchen, wenn man in den Amplituden  $\tilde{E}$  und  $\tilde{P}$  von (5) und (6) eine x-Abhängigkeit zuläßt:

$$E(x,t) = \tilde{E}(x,t)e^{i(kx-\omega t)} + c.c. \quad (37)$$

$$P(x,t) = \tilde{P}(x,t)e^{i(kx-\omega t)} + c.c. \quad (38)$$

Ähnlich wie früher für die Zeitabhängigkeit von  $\tilde{E}$  sei angenommen, daß die Ortsabhängigkeit von  $\tilde{E}$  auf der Längenskala von  $k^{-1} = c/\omega$  sehr schwach ist. Mit der Näherung

$$\left| \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} \right| \ll k \left| \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} \right| \quad (39)$$

folgt dann aus (2)

$$\hat{E} + c \frac{\partial \hat{E}}{\partial x} = -\kappa \hat{E} + 2\pi i \omega \hat{P} \quad (40)$$

oder, mit der Bezeichnung (10), (11),

$$\hat{E} + c \frac{\partial \hat{E}}{\partial x} = -\kappa \hat{E} + g \hat{P} \quad (41)$$

Die Gleichungen für  $\tilde{P}(x,t)$  und  $D(x,t)$  bleiben identisch mit (13) und (14), weil in (3) und (4) keine Ortsdifferentialation auftritt (letzteres hängt damit zusammen, daß zwischen den Atomen keine direkte Wechselwirkung berücksichtigt worden ist). Die stationären Lösungen des Gleichungssystems (41), (13), (14) sind wiederum durch (15) und (16) gegeben, d.h. dies sind die früheren ortsunabhängigen 1-Mode-Lösungen. Mit dem zusätzlichen Term  $c \partial \tilde{E} / \partial x$  in (41) können wir jetzt die Stabilität der 1-Mode-Lösungen bezüglich der Ausbildung von ortsabhängigen Strukturen (z.B. räumlicher Pulsausbreitung) untersuchen. Dazu

führt man die übliche lineare Stabilitätsanalyse durch [18,1b]: Man entwickelt die Lasergleichungen um die stationären Lösungswerte  $\bar{E}, \bar{P}, \bar{D}$  in linearer Ordnung bezüglich der Abweichungen

$$\delta \bar{E} = \bar{E} - \bar{E}, \quad \delta \bar{P} = \bar{P} - \bar{P}, \quad \delta \bar{D} = \bar{D} - \bar{D} \quad (42)$$

Dann führt der Ansatz

$$\begin{pmatrix} \delta \bar{E} \\ \delta \bar{P} \\ \delta \bar{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 \\ p_0 \\ d_0 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda t - i q x} \quad (43)$$

mit reellem  $q$  und komplexem  $\lambda$  auf ein Eigenwertproblem mit charakteristischen Gleichungen, deren Lösungen die möglichen Werte von  $\lambda(q)$  bestimmen. Die stationäre Lösung ist stabil, wenn  $\text{Re}(\lambda) < 0$  für alle möglichen Werte von  $\lambda$  gilt. Es zeigt sich, daß die Lösung (15) für  $D_0 < D_S$  und die Lösung (16) für  $D_S < D_0 < D(2)$  stabil bezüglich raum-zeitlicher Abweichungen des Typs (43) sind. Eine Instabilität setzt aber bei  $D_0 = D(2)$ ,

$$D(2) = \frac{\kappa}{g} \{ 3\gamma_1 + 5\gamma_2 + [8(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_1 + 2\gamma_2)]^{1/2} \} \quad (44)$$

ein [18,19]. Durch numerische Integration findet man, daß sich für  $D_0 > D(2)$  aus kleinen Störungen des stationären Zustandes spontan Lichtpulse entwickeln können ("self-pulsing") [18]. Ihre Struktur, die durch die Einhüllenden  $\bar{E}(x,t), \bar{P}(x,t)$  und  $D(x,t)$  beschrieben wird, ändert sich im Anfangsstadium, geht aber schließlich für große Zeiten ( $t \rightarrow \infty$ ) in die Gestalt

$$\bar{E} = \bar{e}(t - \frac{x}{v}), \quad \bar{P} = \bar{p}(t - \frac{x}{v}), \quad D = d(t - \frac{x}{v}) \quad (45)$$

über, d.h. es ergibt sich eine stationäre Pulsstruktur [20], die mit der konstanten Phasengeschwindigkeit  $v$  durch das Lasermedium wandert ("steady-state pulse"). Als Folge der endlichen Spiegelabstände in einem Ringlaser wird das stationäre Pulsmuster i.a. periodisch, d.h. die Pulsmaxima wiederholen sich in bestimmten Abständen [20]. Demgegenüber würden in einem unendlich ausgedehnten Lasermedium für  $D_0 > D(2)$  chaotische Licht-

pulse (mit irregulären Abständen zwischen den Pulsmaxima) auftreten [3,15]. Dies ist ein weiteres Beispiel für den starken Einfluß von Randbedingungen bei Instabilitäten im Nichtgleichgewicht.

Es ist interessant, daß sich die Bedingung (44) für  $D(2)$  wieder auf dieselbe Instabilität  $r^{(1)}$  des Lorenzmodells zurückführen läßt [15], die auch zur Instabilität bei  $D_0 = D(1)$  im ortsunabhängigen 1-Mode-Fall geführt hat (s. Seite XV-16). Dies sieht man, wenn man für  $\bar{E}, \bar{P}, D$  den Ansatz (45) macht und in (41), (13), (14) einsetzt. Dann erhält man

$$(1 - \frac{c}{v}) \bar{e}' = -\kappa \bar{e} + g \bar{p}, \quad (46)$$

$$\bar{p}' = -\gamma_2 \bar{p} + g \bar{e} d, \quad (47)$$

$$d' = -\gamma_1 (d - D_0) - 2g(\bar{e} \bar{p}' + \bar{e}' \bar{p}) \quad (48)$$

Diese Gleichungen haben dieselbe Struktur wie (12) - (14) und lassen sich deswegen nach einer entsprechenden Umskalung analog zu (35) wieder auf das Lorenzmodell (31) - (33) abbilden. Mit Hilfe dieser Abbildung kann man zeigen [15], daß die Instabilität im Lorenzmodell bei  $r = r^{(1)}$  der Laserbedingung  $D_0 = D(2)$  mit  $D(2)$  gemäß (44) entspricht. Für die in (46) - (48) noch unbestimmte Phasengeschwindigkeit ergibt sich aus  $\sigma > b+1$  die Bedingung

$$c < v < c \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2 - \kappa} \quad (49)$$

Dem chaotischen Verhalten im Lorenzmodell für  $r > r^{(1)}$  entspricht nun eine chaotische Pulsstruktur im unendlich ausgedehnten Lasermedium für  $D_0 > D(2)$ . Zur weiteren Diskussion siehe [3,15,18,21]. Schließlich sei auch auf das Auftreten chaotischer Lösungen der vollen semiklassischen Lasergleichungen (2) - (4) bei hoher Pumpstärke hingewiesen [5].

VII. Periodisches Verhalten und Chaos bei kleiner Pumpstärke

Im folgenden betrachten wir einen Einmodellaser unter dem Einfluß einer äußeren periodischen "Störung". Es zeigt sich, daß als Folge dieser Störung chaotisches Verhalten bereits in einem Pumpstärkebereich  $D_0 < D$  (2) und  $D_0 < D$  (1) auftreten kann, in dem der stationäre Zustand bei Abwesenheit der Störung noch stabil ist. In die Bewegungsgleichungen (12) - (14) kann man zwei Arten von Störungen einbauen: (i) Additive Störungen, z.B. ein zusätzliches äußeres kohärentes Lichtfeld  $E_a(x,t)$  mit derselben Ausbreitungsrichtung und (linearen) Polarisation wie das 1-Mode-Laserlicht [22],

$$E_a(x,t) = \tilde{E}_a(t)e^{i(kx-\omega t)} + c.c. ; \quad (50)$$

dann ist (12) durch

$$\dot{\tilde{E}} = -\kappa(\tilde{E} - \tilde{E}_a) + g\tilde{P} \quad (51)$$

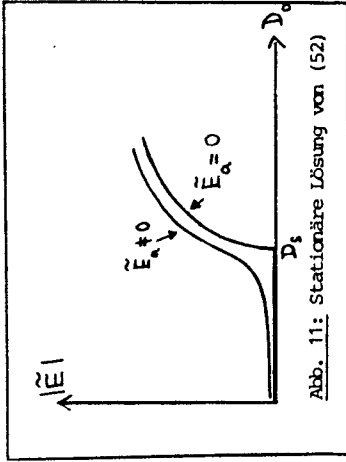
zu ersetzen, während (13) und (14) unverändert bleiben. (ii) Parametrische Störungen, z.B. eine zeitlich modulierte Sättigungsinversion [23]  $D_0 = D_0(t)$  in (14) bei unveränderten Gleichungen (13) und (12) bzw. (51). Wir besprechen zunächst den ersten Fall (i).

Im bereits früher betrachteten Fall  $\kappa \ll \gamma_1 + \gamma_2$  (s. Seite XV-8) lassen sich die Atomvariablen näherungsweise eliminieren. Dann erhält man durch Einsetzen von (18) und (51) analog zu Gleichung (19)

$$\dot{\tilde{E}} = -\kappa\tilde{E} \left\{ 1 - \frac{D_0/D_S}{1 + \beta|\tilde{E}|^2} \right\} + \kappa\tilde{E}_a \quad (52)$$

mit  $\beta = 4g^2/\gamma_1\gamma_2$ . Das äußere Feld  $\tilde{E}_a \neq 0$  läßt nun auch für  $D_0 < D_S$  keine Lösung  $\tilde{E} = 0$  mehr zu. Dies ist ähnlich wie in einem Ferromagneten, bei dem ein äußeres Magnetfeld auch für  $T > T_C$  eine endliche Magnetisierung  $M$  induziert. Dadurch wird

M eine analytische Funktion in der Umgebung  $T_C$ . Analog gibt es für  $\tilde{E}_a \neq 0$  keinen scharfen Übergang für die Laserlichtamplitude  $\tilde{E}$  in der Umgebung der Schwelle. Dies ist in Abb. 11 qualitativ für den Fall illustriert, daß  $\tilde{E}_a$  zeitunabhängig ist. Dann existiert eine stabile stationäre Lösung für  $\tilde{E}$  in einem weiten Bereich auch oberhalb von  $D_S$ .



Interessanter ist der Fall, daß  $\tilde{E}_a$  periodisch veränderlich ist:

$$\tilde{E}_a = A e^{i\Omega t} , \quad (53)$$

d.h. wenn das eingestrahlte Lichtfeld  $E_a$ , (50), eine etwas andere Frequenz

$$\omega_a = \omega + \Omega \quad (54)$$

als das ursprüngliche Laserlicht ( $\omega$ ) ohne Störung hat. Es ist zu erwarten, daß nun die aufgeprägte Frequenz  $\omega_a$  auch das resultierende Licht  $E$  dominiert; deswegen ist die weitere Zerlegung

$$\tilde{E} = Q e^{i\Omega t} \quad (55)$$

sinvoll. Einsetzen von (53), (55) in (52) ergibt

$$\dot{Q} = -\kappa Q \left\{ 1 - \frac{D_0/D_S}{1 + \beta|Q|^2} - i\frac{\Omega}{\kappa} \right\} + \kappa A . \quad (56)$$

Wenn  $A$  zeitunabhängig ist, ist für hinreichend geringe Pumpstärke eine stabile stationäre Lösung mit  $|Q| \neq 0$  zu erwarten. Aus (56) ergibt sich als Bestimmungsgleichung für  $|Q|$

$$\left[ 1 - \frac{D_0/D_S}{1 + \beta|Q|^2} \right]^2 + \frac{\Omega^2}{\kappa^2} = \frac{|A|^2}{|Q|^2} \quad (57)$$

Eine lineare Stabilitätsanalyse zeigt [22], daß für  $D_0 < D_S$  eine stabile Lösung von (57) existiert, die aber für hinreichend große  $D_0 > D_S$  instabil wird, wenn  $\Omega \neq 0$  ist. [Diese Instabilität hat nichts mit den früher besprochenen Instabilitäten bei D(1) oder D(2) zu tun, die ja durch (19) oder (56) gar nicht beschrieben werden können.] Für hinreichend kleine  $|A|$  tritt die Instabilität bei

$$\frac{D_0}{D_S} = 1 + \frac{\kappa^2 \gamma_1 \gamma_2}{2g^2} \frac{|A|^2}{\Omega^2} \quad (58)$$

kurz oberhalb der sonst üblichen Laserschwelle  $D_0 = D_S$  auf.

Eine numerische Untersuchung [22] ergibt, daß oberhalb der Stabilitätsgrenze (Abb. 12) eine kleine Störung zu einem für  $t \rightarrow \infty$  periodischen Verhalten von Q (Grenzzyklus) führt, obwohl die äußere Amplitude A zeitunabhängig ist. Bei festem  $\Omega$  wächst der periodische Anteil von Q mit  $D_0$  in stetiger Weise, wenn A hinreichend klein ist. Für große A kann der Übergang un- stetig werden (Abb. 12).

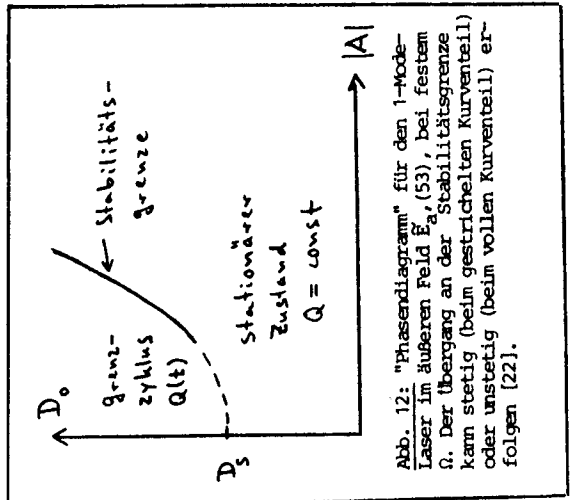


Abb. 12: "Phasendiagramm" für den 1-Modell-Laser im äußeren Feld  $\vec{E}_a$  (53), bei festem  $\Omega$ . Der Übergang an der Stabilitätsgrenze kann stetig (beim gestrichelten Kurventeil) oder unstetig (beim vollen Kurventeil) erfolgen [22].

Das Langzeitverhalten von Q wird noch wesentlich komplizierter, wenn zusätzlich die Amplitude A periodisch mit einer Frequenz  $\Omega'$  moduliert wird,

$$A(t) = A_0 + A_1 \cos(\Omega't) \quad (59)$$

Mit wachsendem  $A_1$  treten verschiedene periodische und quasi-periodische Zustände und auch chaotisches Verhalten auf. Zur genaueren Diskussion sei auf [22] verwiesen.

Abschließend beschreiben wir kurz den zweiten Fall (ii) einer parametrischen periodischen Störung. Auf einen Einmodellaser soll ein äußeres Lichtfeld (50) mit einer konstanten Amplitude  $\vec{E}_a$  eingestrahlt werden, und zusätzlich soll eine periodische Modulation der effektiven Pumpstärke gemäß

$$D_0(t) = d_0 + d_1 \cos \Omega't \quad (60)$$

mit konstanten Amplituden  $d_0$  und  $d_1$  erfolgen [23]. Unter der Voraussetzung  $\kappa \ll \gamma_1 + \gamma_2$  wird diese Situation wieder durch (52) beschrieben. Diese Gleichung für die komplexe Amplitude  $\vec{E}$  ist mit drei gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichungen für die reellen Größen

$$x(t) = \text{Re}(\vec{E}), \quad y(t) = \text{Im}(\vec{E}), \quad \psi(t) = \Omega't \quad (61)$$

äquivalent. Dies erklärt, daß Gleichung (52) im Falle von (60) chaotische Lösungen  $\vec{E}(t)$  haben kann. Zur Diskussion des komplizierten Bifurkationsschemas bei zunehmendem  $d_1$  sei auf [23] verwiesen.

VIII. Instabilitäten in passiven optischen Systemen

Ein weites Feld für die Untersuchung verschiedener Bifurkationen und Übergänge in chaotische Zustände bieten "passive" nichtlineare optische Systeme. "Passiv" ist hier im Gegensatz zu "laseraktiv" gemeint, d.h. das optisch nichtlineare Material soll nicht durch eine Hilfsquelle (Pumpe) angeregt und zur Erzeugung von Licht benutzt werden, sondern soll nur eine (nichtlineare) Veränderung der Eigenschaften des von einer äußeren kohärenten Lichtquelle (Laser) eingestrahlten Lichts bewirken. Eine dafür typische Situation ist in Abb. 13 schematisch dargestellt.

In einem Resonator (halbdurchlässige Spiegel) befindet sich das optisch nichtlineare Medium, das von einer stationären Lichtquelle mit der zeitunabhängigen Intensität  $I_e$  be-

strahlt wird. Das wieder austretende Licht kann nun bezüglich seiner Intensität  $I_a$ , seiner Frequenz, Ausbreitungsrichtung und Polarisation und insbesondere bezüglich einer eventuell spontan auftretenden chaotischen Zeitabhängigkeit untersucht werden. Die Rolle des variablen "Kontrollparameters" spielt nun die Intensität  $I_e$  oder die Amplitude  $\sim \sqrt{I_e}$ . Im austretenden Licht findet man unter gewissen Bedingungen eine große Vielfalt verschiedener Phänomene wie z.B. optische Bistabilität, Frequenzverdopplung, Instabilitäten, die zu periodischem oder chaotischem Verhalten führen etc. Aus Zeitgründen kann hier auf diese Phänomene, die den in Kap. III-VII beschriebenen Eigenschaften des Lasers zum Teil sehr ähnlich sind, nicht eingegangen werden. Für Interessenten ist aber unter [24] eine Auswahl aktueller Literatur zu diesem Themenkreis angegeben.

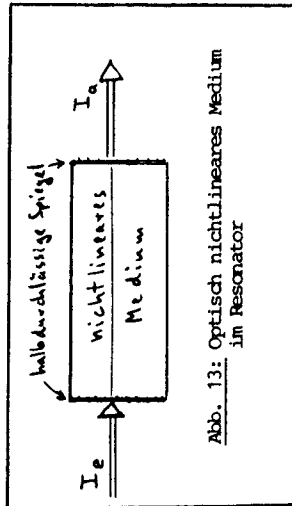


Abb. 13: Optisch nichtlineares Medium im Resonator

Übersichtsartikel

1. H. Haken, (a) Handbuch der Physik, Bd. XXV/2c (1970); (b) "Synergetics" (Springer 1977), Kap. 8.
2. R. Graham, in "Fluctuations, Instabilities, and Phase Transitions", Herausgeber T. Riste (Plenum 1975)
3. R. Graham, "Chaos in Simple Laser Systems", Workshop on Coupled Nonlinear Oscillators, Los Alamos (1981) (noch unveröffentlicht).

Weitere Literatur

4. G.L. Lamb, Jr., Rev. Mod. Phys. 43, 99 (1971).
5. H. Haken, "Dynamics of Synergetic Systems" (Springer 1980), Part I.
6. V. De Giorgio, M.O. Scully, Phys. Rev. A2, 1170 (1970)
7. R. Graham, H. Haken, Z. Phys. 237, 31 (1970)
8. R. Graham, in "Progress in Optics", Herausgeber E. Wolf (North-Holland, 1974), Vol. XII, p.235
9. V. Dohm, Solid State Commun. 11, 1273 (1972); Phys. Rev. A14, 393 (1976)
10. R. Graham, in "Order and Fluctuations in Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics", Herausgeber G. Nicolis, G. Dewel, J.W. Turner (Wiley 1981).
11. L.A. Lugiato, P. Mandel, S.T. Dembinski, A. Kossakowski, Phys. Rev. A18, 238 (1978).
12. J.F. Scott, M. Sargent, C.D. Cantrell, Opt. Comm. 15, 13 (1975)
13. E.N. Lorenz, J. Atmos. Sci. 20, 130 (1963).
14. H. Haken, Phys. Lett. 53A, 77 (1975).
15. R. Graham, Phys. Lett. 58A, 440 (1976)
16. J.A. Yorke, E.D. Yorke, J. Stat. Phys. 21, 263 (1979).
17. H. Risken, C. Schmid, W. Weidlich, Z. Physik 194, 337 (1966)
18. H. Risken, K. Nummedal, J. Appl. Phys. 39, 4662 (1968).
19. R. Graham, H. Haken, Z. Phys. 213, 420 (1968)
20. Je nach Anfangsbedingungen und Parameterwahl können sich aber auch nichtstationäre Pulsstrukturen ausbilden, deren

- Zeitabhängigkeit periodisch oder chaotisch ist, siehe M. Mayr, H. Risken, H.D. Vollmer, Opt. Comm. 36, 480 (1981).
21. H. Haken, H. Ohno, Opt. Comm. 16, 205 (1976); 26, 117 (1978); H. Ohno, H. Haken, Phys. Lett. 59A, 261 (1976).
  22. T. Yamada, R. Graham, Phys. Rev. Lett. 45, 1322 (1980)
  23. H.J. Scholz, T. Yamada, H. Brand, R. Graham, Phys. Lett. 82A, 321 (1981).
  24. Artikel in "Optical Bistability", Herausgeber C.M. Bowdon et al. (Plenum 1981); E. Abraham, S.D. Smith, Rep. Progr. Phys. 45, 815 (1982); K. Ikeda, Opt. Comm. 30, 257 (1979); W.J. Firth, Opt. Comm. 39, 343 (1981); L.A. Lugiato, Opt. Comm. 33, 108 (1980); K. Ikeda, O. Akimoto, Phys. Rev. Lett. 48, 617 (1982); H.M. Gibbs et al., Phys. Rev. Lett. 46, 474 (1981); A. Silberberg, I. Bar Joseph, Phys. Rev. Lett. 48, 1541 (1982).